

Kretanje fluida je znatno komplikovanije od kretanja čvrstog tela.

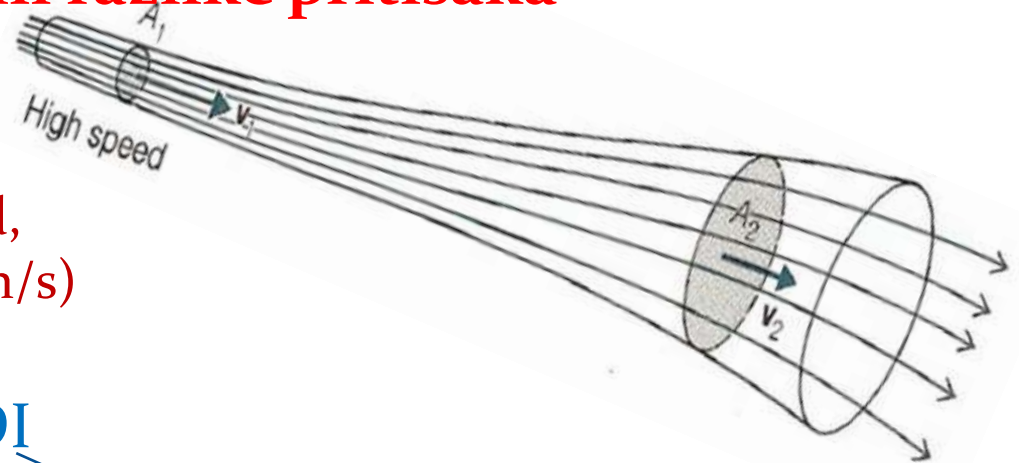
Delići fluida se kreću jedan u odnosu na druge i ne kreću se svi isto.

Pristup **analizi kretanja fluida** je drugačiji, **utvrđuje se raspodela brzina, gustine i pritiska u raznim tačkama struje fluida.**

Kretanje fluida se naziva *strujanje fluida* = nastaje zbog težine fluida ili razlike pritiska

razmatramo strujanje:

- idealnih fluida,
- konstantne gustine –nestišljiv fluid,
- malim brzinama (v manje od 100 m/s)



FLUIDI

Idealni

-nema unutrašnjeg trenja

Zanemarena viskoznost

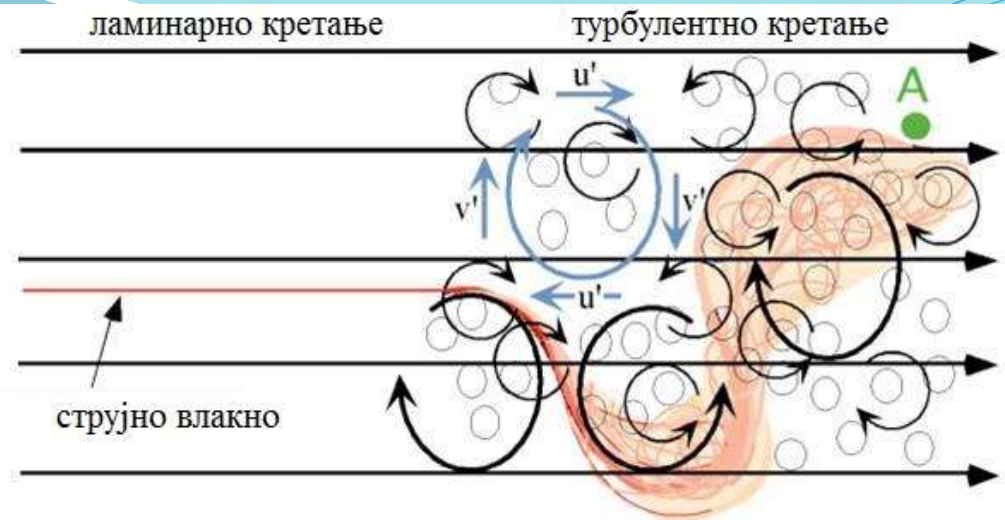
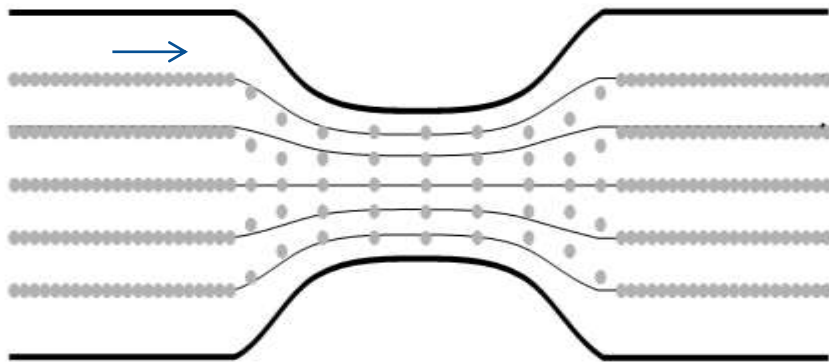
Realni

- pri kretanju postoji unutrašnje trenje kao posledica međumolekularnih sila.

Viskoznost uzeta u obzir

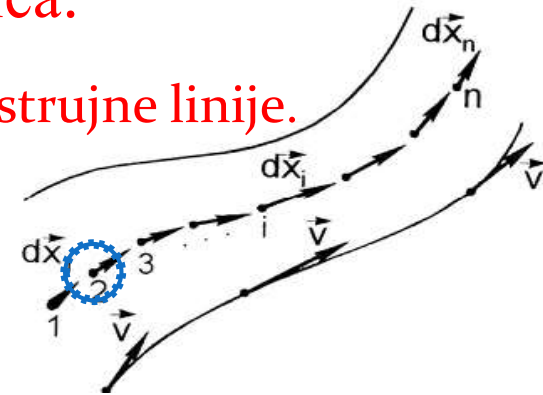
Viskoznost - posledica unutaršnjeg trenja među česticama fluida

Osnovni pojmovi

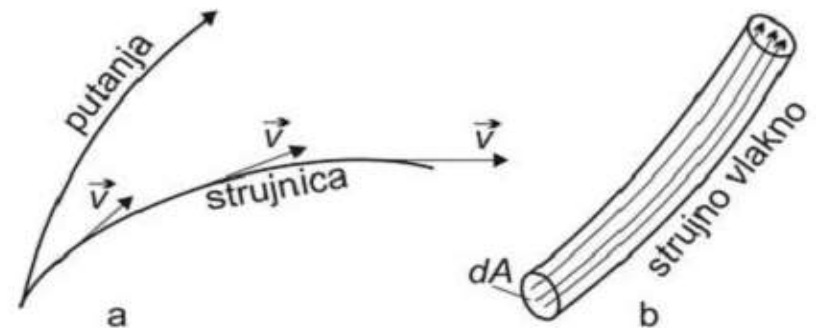


- **Kretanje fluida se opisuje kretanjem njegovih čestica.**
- Linije duž kojih se kreću čestice fluida nazivaju se **strujnice, strujne linije.**

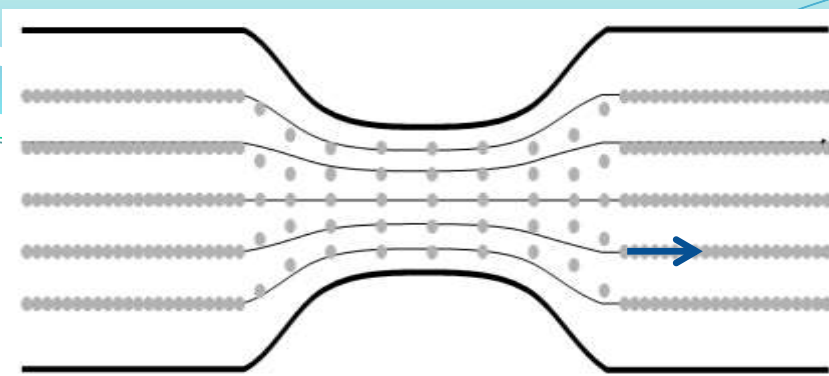
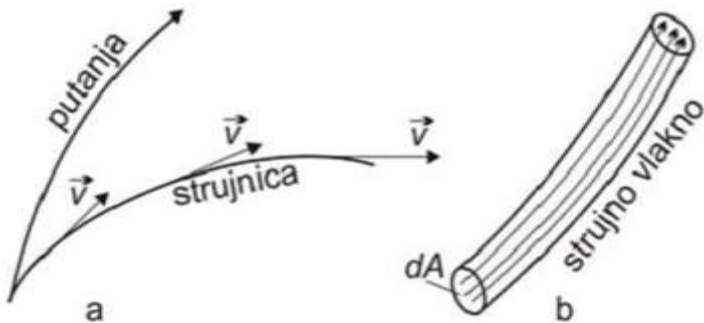
Brzina kretanje čestica u određenoj tački strujnice ista je za sve čestice koje dospevaju u tu tačku.



- **Putanja** je geometrijsko mesto tačaka kroz koje je prošao delić fluida, "trag" kretanja. Pri stacionarnom kretanju strujnica i putanja se podudaraju.

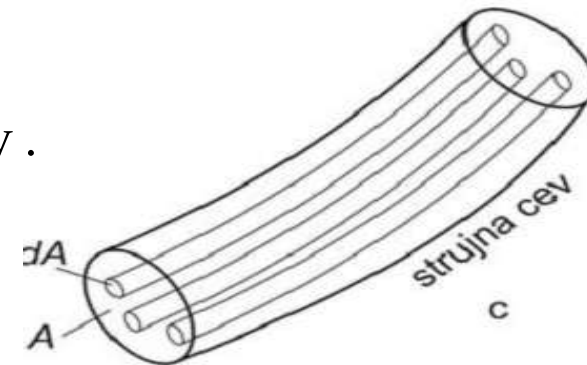


Osnovni pojmovi

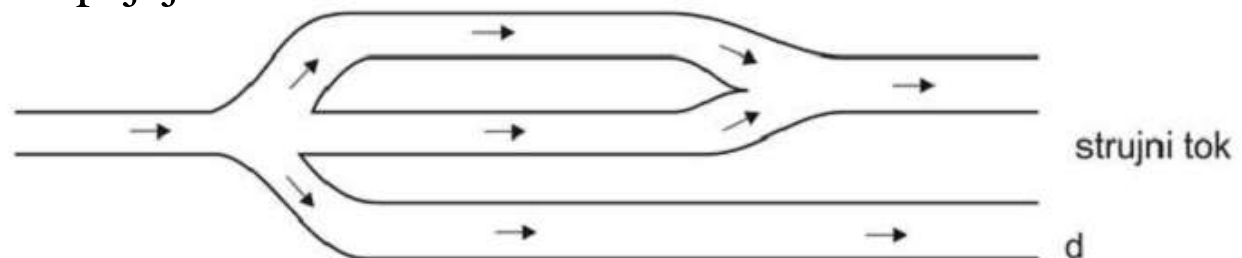


• **Strujno vlakno** predstavlja skup strujnica i ono predstavlja elementarnu (diferencijalnu) strujnu cev .

• Deo fluida ograničen strujnicama naziva se **strujna cev** broj čestica unutar strujne cevi je stalan.



Strujni tok je zbir više strujnih cevi koje granaju- razdvajaju i spajaju

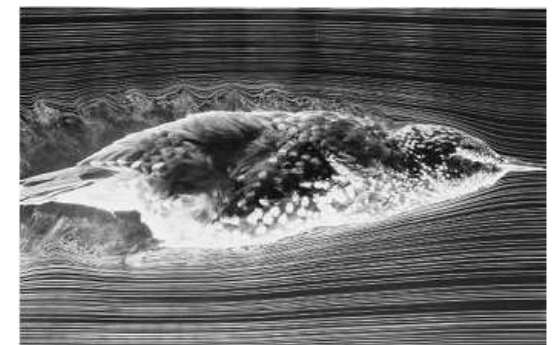
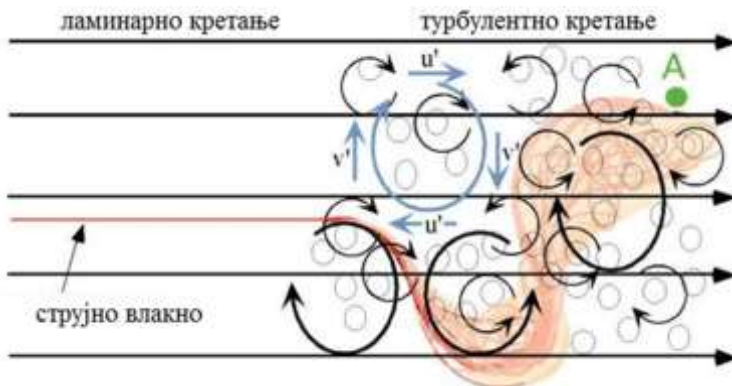


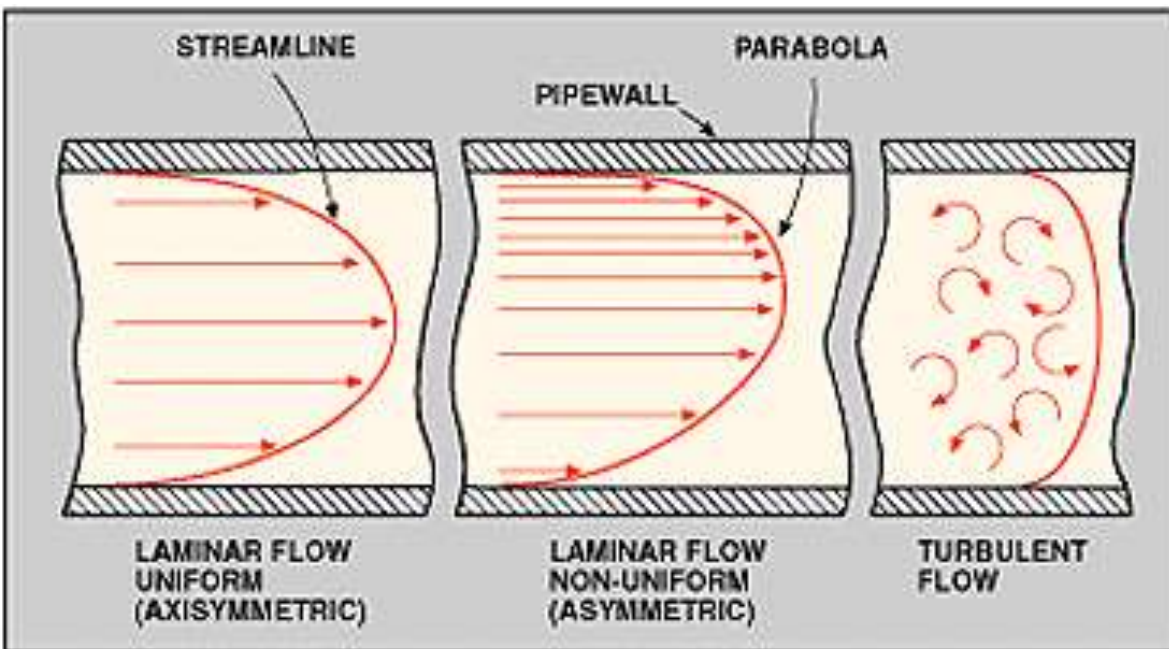
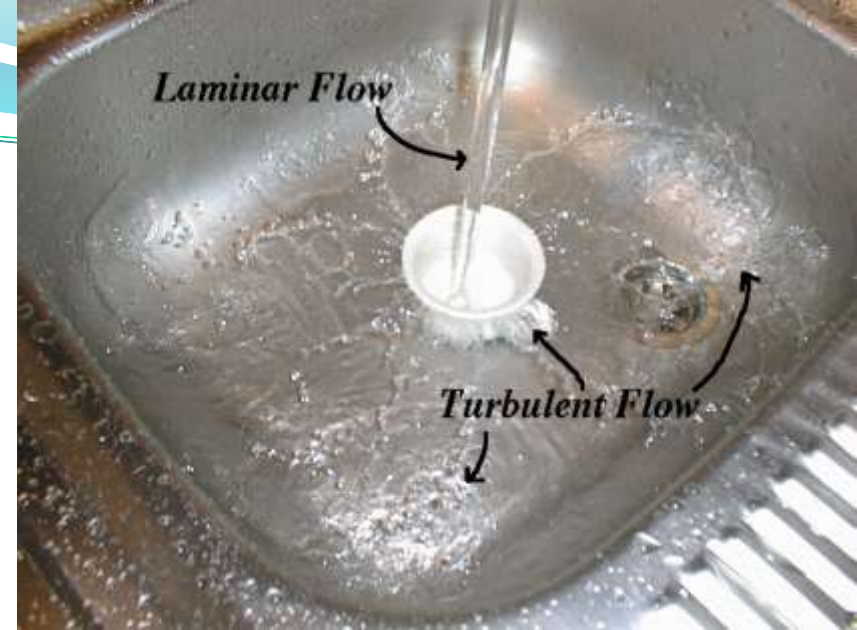
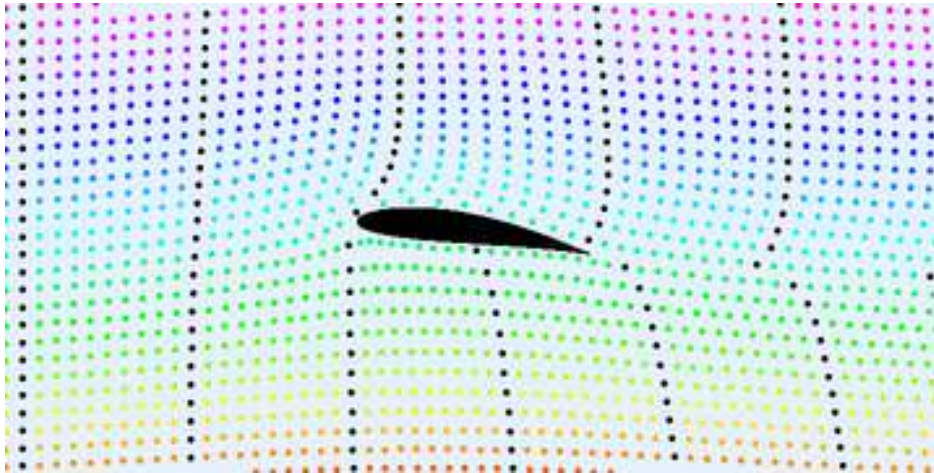
(razgranate cevne mreže, reke sa kanalima i sl).

Vrste strujanje fluida

- **Stacionarno(laminarno) strujanje** – brzina i pritisak čestica u pojedinim tačkama prostora zavise samo od položaja, a ne od vremena, - svaka čestica koja prolazi kroz datu tačku sledi istu strujnicu kao i prethodna.
- **Nestacionarno strujanje** – brzina i pritisak čestica se menjaju u zavisnosti od vremena
- **Turbulentno ili vrtložno strujanje** - gornji uslov nije ispunjen.(prepreke na putu izazivaju nagle promene brzine. Velike brzine fluida.)

pojava vrtloga u kojima se mešaju slojevi fluida, komponente brzina delića fluida su usmerene u svim mogućim pravcima, a ne samo u smeru kretanja fluida.





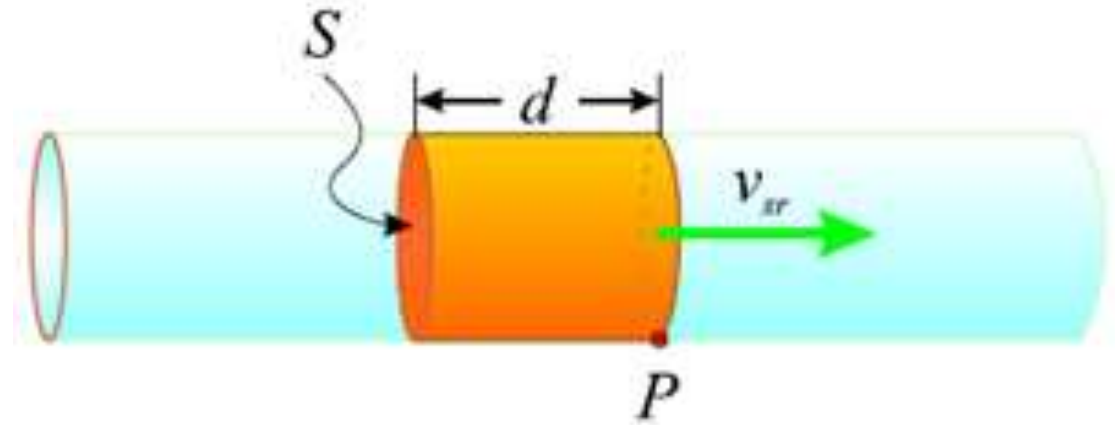
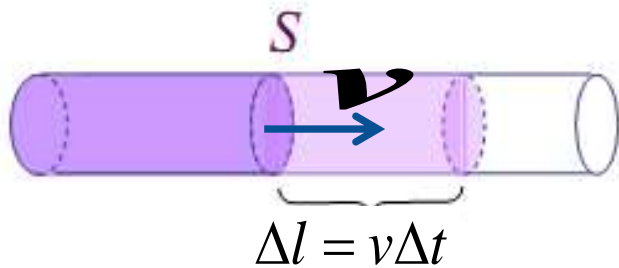
Laminarno kretanje - kretanje kod koga se

- raspored strujnih linija ne menja u toku vremena , glatke su i neprekidne ,
- slojevi fluida se ne mešaju ,
- - niski intenziteti strujanja fluida.

Posledica je, male brzine kretanja fluida, prepreke na putu ne izazivaju nagle promene brzine.

Strujanje fluida

- **Protok fluida** se definiše kao zapremina fluida koja u jedinici vremena prođe kroz neku površinu.



$$Q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S v \Delta t}{\Delta t} = S v$$

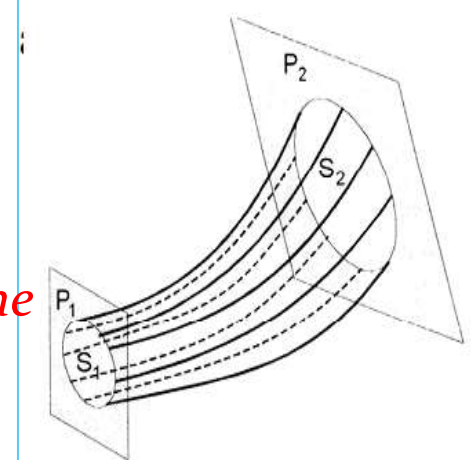
$$Q = [\text{m}^3/\text{s}]$$

Zapreminski protok ili
jačina strujanja fluida

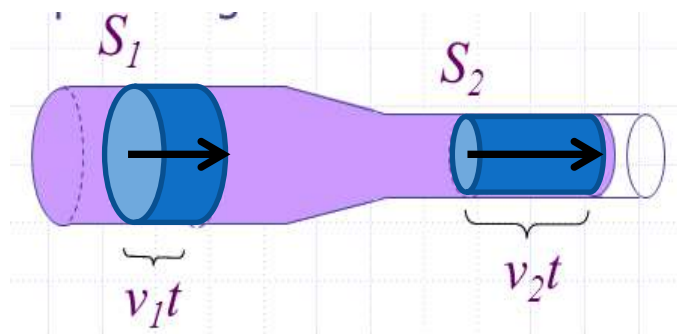
!!! Važi za laminarno strujanje nestišljivog fluida!!!

Jednačina kontinuiteta fluida

- Kada se menja presek cevi kroz koju struji fluid menja se i brzina strujanja.
- Zbog osobine **nestišljivosti** (gustina je svugde ista) **zapremine proteklog fluida koja u jedinici vremena prođe kroz dva različita preseka strujne cevi su jednake.**



- v_1 i v_2 brzine strujanja fluida kroz poprečne preseke S_1 i S_2
- strujna cijev u kojoj se presek S menja
- brzine v_1, v_2 stalne



-Zapremina valjka

$$\Delta V = S \Delta l$$

Brzina- $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$

$$V_1 = S_1 v_1 \Delta t, \quad V_2 = S_2 v_2 \Delta t$$

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Jednačina kontinuiteta:

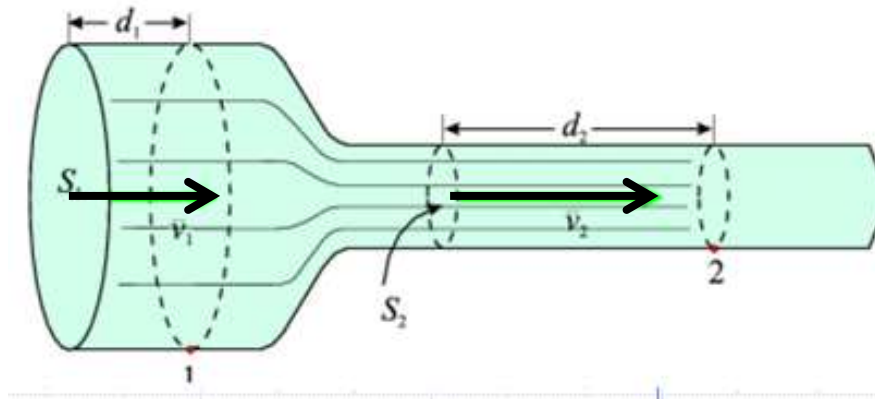
$$S v = \text{const}$$

Jednačina kontinuiteta fluida

Jednačina kontinuiteta:

$$S v = \text{const} \text{ ili } Q_V = \text{const}$$

proizvod površine bilo kog poprečnog preseka neke strujne cevi i srednje brzine fluida u tom preseku je konstantan;
Zapreminski protok laminarnog i nestišljivog fluida je konstantan.
- brzina fluida je veća gde je strujna cev uža.



- v_1 i v_2 brzine strujanja fluida kroz poprečne preseke S_1 i S_2

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Jednačina kontinuiteta.

U opštem, tj. **realnom** slučaju, kada je fluid **stišljiv** (ima različitu zapreminu, pa tako i gustinu u različitim delovima strujne cevi), uzima se da je **maseni protok fluida na dva različita preseka strujne cevi jednak**.

(kolika masa fluida prođe kroz jedan poprečni presek strujne cevi, toliko masa mora proći u jedinici vremena i kroz bilo koji drugi poprečni presek).

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 S_1 v_1$$

$$\frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 S_2 v_2$$

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta x}{\Delta t} = \rho S v$$

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

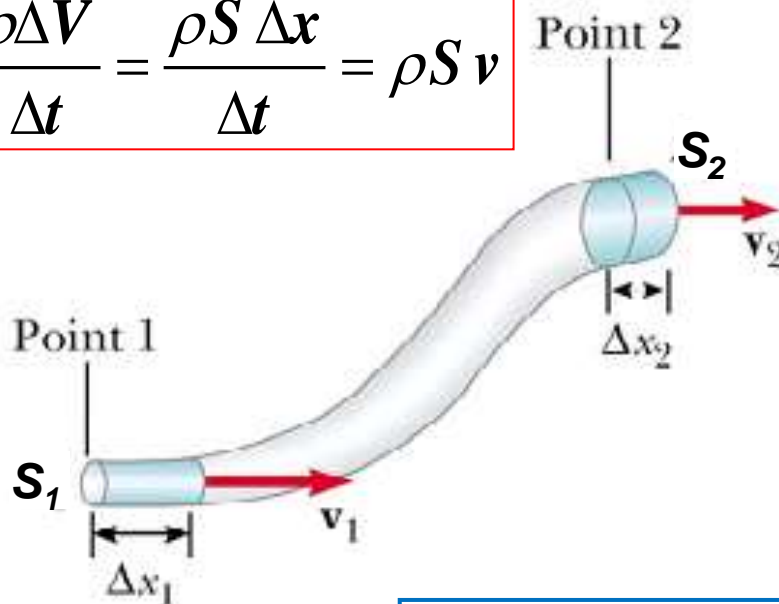
$$\rho S v = \text{const.}$$

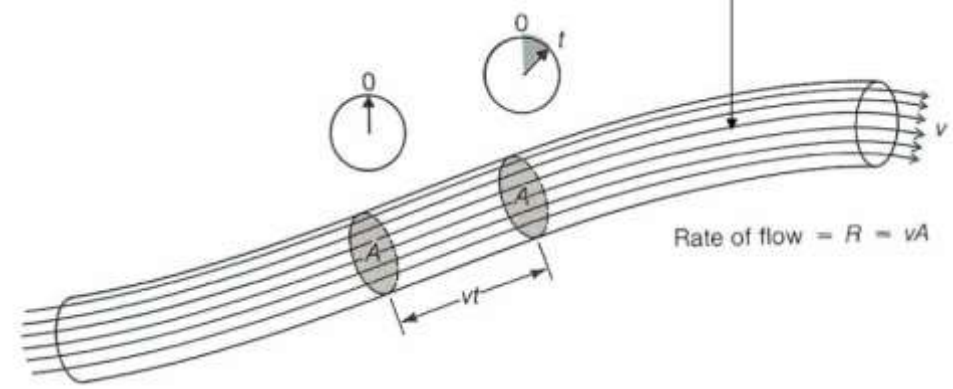
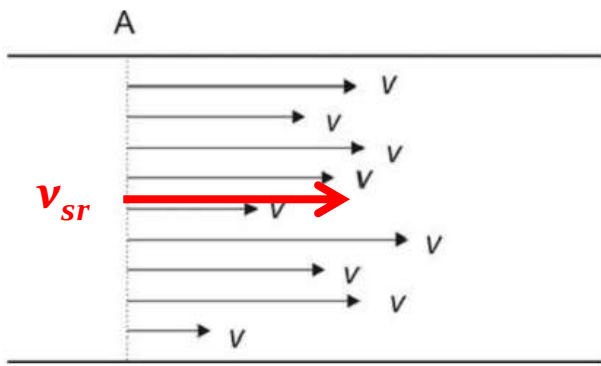
← Jednačina kontinuiteta

Maseni protok fluida je protekla masa fluida kroz strujnu cev u jedinici vremena.

Zapreminski protok fluida je protekla količina (zapremina) fluida kroz strujnu cev u jedinici vremena:

$$Q = \frac{V}{t} = S v$$





vrednost normalne komponente brzine čestica fluida je različita po preseku strujne cevi, pa za praktičnu primenu uzima \mathbf{v}_{SR}

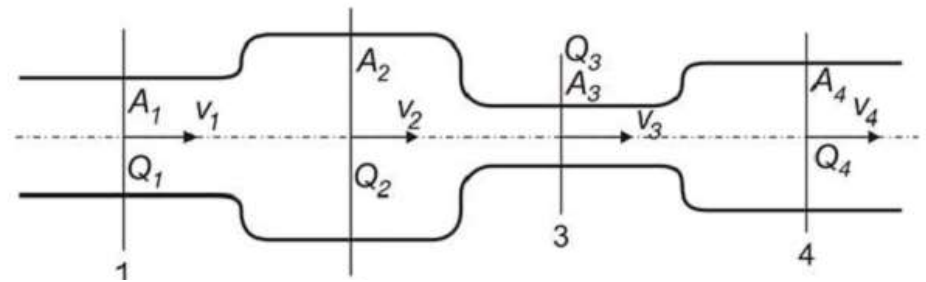
Jednačina kontinuiteta za strujnu cev se formuliše na sledeći način: $dm/dt=const$ ili $Q=const$

$$\dot{m} = \int \rho(\vec{v} \cdot d\vec{A}) = v_{SR} A$$

$$v_{SR} = \frac{\int v dA}{A}$$

$$v_{SR} = \frac{Q}{A}$$

srednja brzina u strujnoj cevi.



$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dots = \rho v A = const$$

a za nestišljive fluide ($\rho = const$):

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = \dots = v A = const$$

Bernulijeva jednačina

Strujanje tečnosti (fluida) je posledica delovanja **spoljašnjih sila**.

Rad spoljašnjih sila menja **kinetičku** i **potencijalnu energiju tečnosti**.

(nestišljivog - $\rho = \text{const}$ i bez unutrašnjeg trenja,)

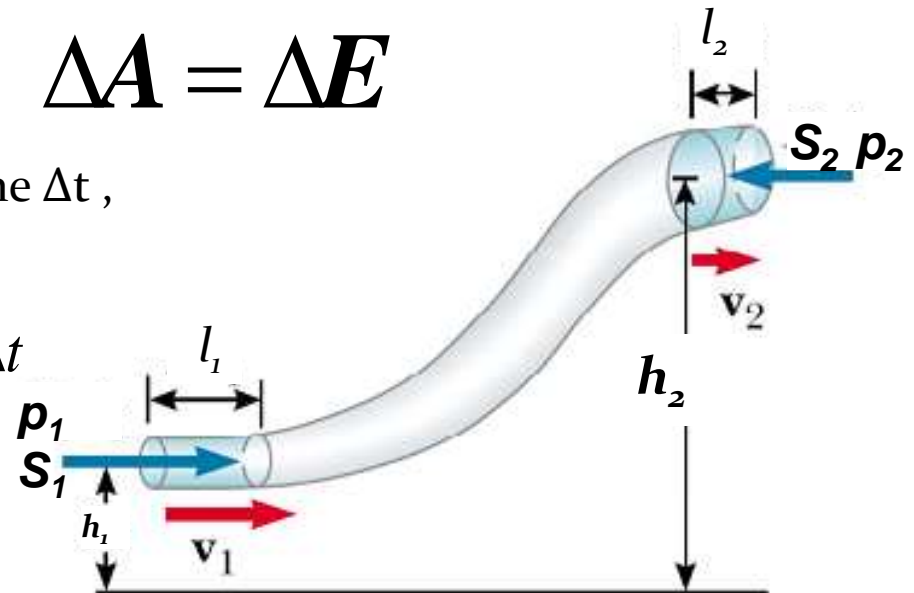
$$\Delta A = \Delta E$$

Neka je Δm masa potisnutog fluida za vreme Δt ,

u bilo kom preseku strujne cevi:

$$V_1 = V_2 = \frac{\Delta m}{\rho} \quad l_1 = v_1 \Delta t, \quad l_2 = v_2 \Delta t$$

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$$



Referentni nivo

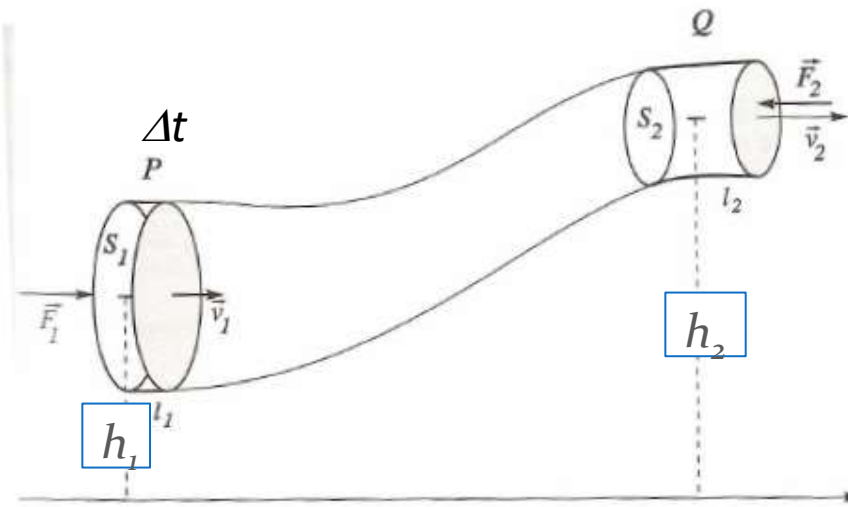
$$\Delta E_k = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2}$$

$$\Delta E_p = \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1$$

Bernulijeva jednačina

jedn. kontinuiteta

stacionarno strujanje idealnog fluida



protok jednak u presecima S_1 i S_2

Zapremina fluida ΔV u vremenu Δt

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho}$$

Spoljašnje sile su posledica pritiska u cevima.

sile pritiska $F = pS$ i rad sila pritiska $A = F \cdot l$

$$\Delta A_1 = F_1 \Delta l_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\Delta A_2 = -F_2 \Delta l_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t = -p_2 \frac{\Delta m}{\rho}$$

Ukupni rad
+

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho}$$

F_2 se suprodstavlja delovanju p_1 negativan rad, smer suprotan od kretanja fluida

Element puta na kojem deluje sila kad pomera fluid

$$\Delta l = v \Delta t$$

- Na osnovu zakona održanja energije, promena ukupne energije fluida ΔE je jednaka radu spoljašnjih sila $-\Delta A$:

U fluidu nema trenja pa:

$$\Delta A = \Delta E$$

Rad spoljašnjih sila

Promena energije, kinetičke i potencijalne

$$\Delta E = E_{k2} + E_{p2} - (E_{k1} + E_{p1})$$

$$\Delta E = (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{p2} - E_{p1})$$

Uvrštavanjem $E_k = \frac{mv^2}{2}$ $E_p = mgh$ \rightarrow $\Delta E = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1$

Iz relacija $\Delta A = \Delta E$ i \mathcal{R} $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho}$ sledi:

$$(p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1$$

$$(p_1 - p_2) \frac{1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g h_2 - g h_1$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \text{ili još kraće}$$

BERNOULLI-JEVA JEDNAČINA

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = const$$

Statički pritisak
zbog spoljašnjih sila

Hidrostatički pritisak
zbog visinske razlike
elementa fluida

Dinamički pritisak
zbog kretanja fluida

Važi za strujnu cev, i
ima **velika ograničenja**:
- neviskozni fluid,
- stacionarno strujanje i
- nestišljivi fluid.
I pored velikih
ograničenja, jednačina
ima **veoma veliki**
praktični značaj.

Kod stacionarnog strujanja **nestišljivog** fluida
zbir **statičkog** - p , **visinskog** - $\rho g h$ i **dinamičkog** - $\rho v^2/2$ pritiska
duž strujne cevi je stalan.

- **Ili**: suma pritiska p , kinetičke energije po jedinici zapremine $\rho v^2/2$ i potencijalne energije po jedinici zapremine $\rho g h$ nestišljivog fluida ima konstantnu vrednost duž strujne cevi.

kosa cijev, fluid miruje

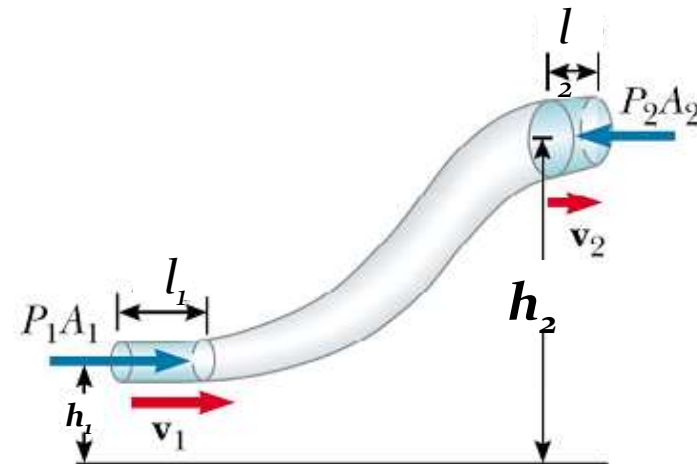
➔ $v=0$

$$p + \rho g h = konst.$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1)$$

$$\Delta p = \rho g (h_2 - h_1)$$

Hidrostatski pritisak
zbog visinske razlike fluida



Referentni nivo

Isticanje tečnosti kroz male otvore. Toričelijeva teorema.

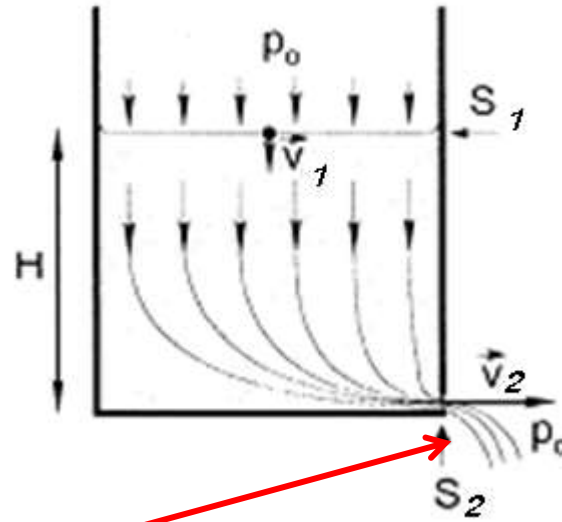
$$p_1 = p_2 \equiv p_0$$

$$h_1 = H \quad h_2 = 0$$

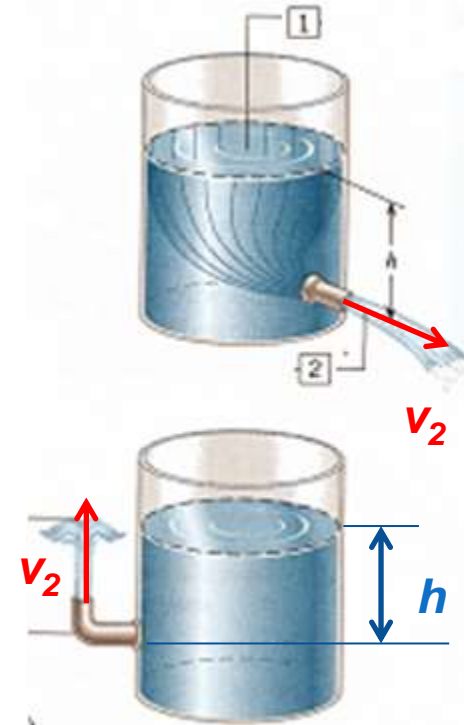
$$v_2 \gg v_1 \quad v_1 \approx 0$$

$$v_2 \equiv v$$

$$p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g H = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$



$$v = \sqrt{2gH}$$



Toričelijeva teorema: brzina isticanja tečnosti/ v iz širokog i otvorenog prema atmosferi suda kroz mali otvor, koji se nalazi na vertikalnom rastojanju H od nivoa slobodne površine, jednaka je brzini slobodnog pada tela sa iste visine.

4. Slučaj -Pitova cev se koristi za merenje brzine protoka fluida. Primenom Bernulijene jednačine na mestu otvora cevi i daleko izvan nje na istoj visini u odnosu na referentni nivo dobijamo

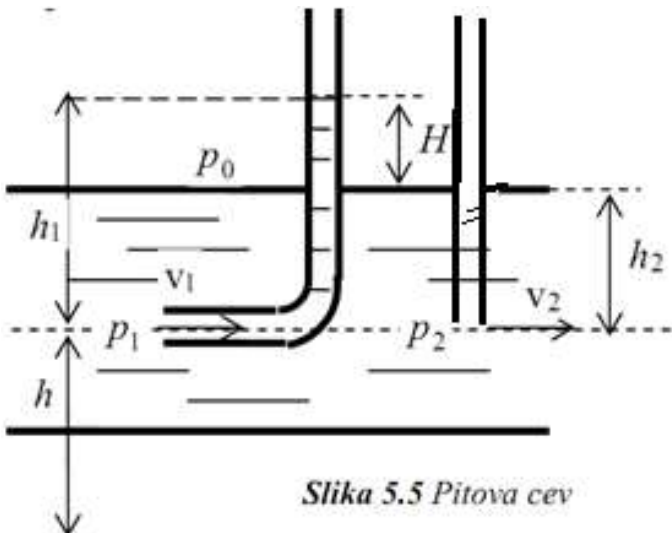
$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 + \rho g h.$$

Na otvoru cevi fluid miruje, odn. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Statički apsolutni pritisci u datim tačkama prostora iznose

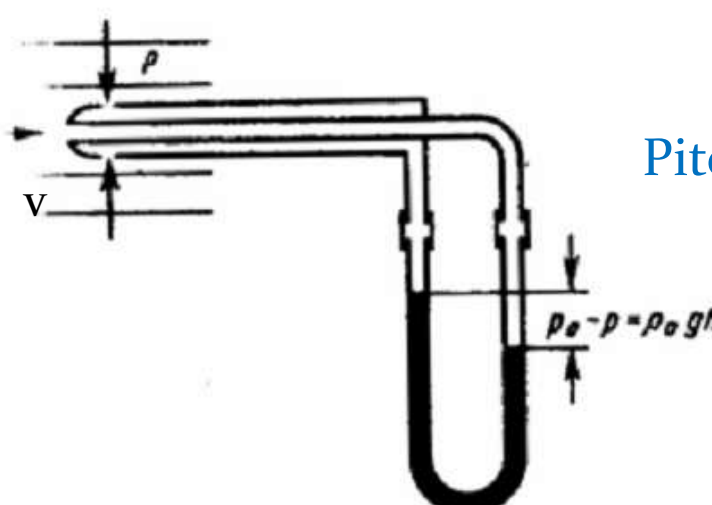
$$p_1 = p_0 + \rho g h_1, \quad p_2 = p_0 + \rho g h_2.$$

dobijamo da je brzina protoka fluida na datom nivou , gde je $H = h_1 - h_2$

$$v_2 = \sqrt{2gH}$$



Slika 5.5 Pitova cev



Pitot- Prandtlova cev.

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_0 g h}{\rho}}$$